

## İLMO 2009

### 2. AŞAMA SINAV SORULARI

#### 1. OTURUM

- 1)  $8 \times 8$  'lik bir karenin iki zıt köşesinden birer birimlik kare çıkarılsın. Kalan yüzeyi  $1 \times 2$  'lik dikdörtgenlerle kaplamanın mümkün olup olamayacağını kanıtlayarak belirtiniz.
- 2)  $A$  ve  $B$  noktalarında kesişen iki çember veriliyor. Çemberlerden birine ait  $U, V$  noktalarını  $A$  'ya birleştiren doğrular, diğer çemberi sırası ile  $U'$  ve  $V'$  noktalarında kesiyor.  $UV$  doğrusu ile  $U'V'$  doğrusunun arakesit noktası  $T$  olsun.  $\widehat{BUU'} = \widehat{BTU'}$  olduğunu gösteriniz.
- 3)  $S$  rasyonel sayıların aşağıda verilen şartlarını sağlayan bir alt kümesi olsun.
  - (a)  $\frac{1}{2} \in S$
  - (b)  $x \in S$  ise  $\frac{1}{x+1} \in S$  ve  $\frac{x}{x+1} \in S$  olur.
 (0,1) açık aralığındaki her rasyonel sayının  $S$  'in elemanı olduğunu gösteriniz.

#### 2. OTURUM

- 1) Her  $n$  pozitif tamsayısı için  $\sigma(n)$ ,  $n$  'in bütün bölenleri toplamı olsun.  $1 \leq m \leq n$  ve  $(m, n) = 1$  olacak şekildeki tüm  $m$  sayılarının sayısı  $\varphi(n)$  olsun ( $\varphi(n)$  fonksiyonu Euler Phi fonksiyonu olarak bilinmektedir).
  - a. Her  $n > 1$  için  $\sigma(n)\varphi(n) < n^2$  olduğunu gösteriniz.
  - b. Her  $n \geq 1$  için  $\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n$  olduğunu gösteriniz.
  - c.  $\sigma(n) + \varphi(n) = 2n$  olacak şekildeki tüm pozitif sayıları kanıtlayarak belirleyiniz.
- 2) Bir  $ABC$  üçgeninin içinde  $\widehat{DAB} = \widehat{EAC}$  ve  $\widehat{DBA} = \widehat{EBC}$  olacak şekilde  $D$  ve  $E$  noktaları alınıyor.  $\frac{|AD||AE|}{|AB||AC|} + \frac{|BD||BE|}{|AB||BC|} + \frac{|CD||CE|}{|AC||BC|}$  ifadesinin değerini bulunuz.
- 3) İkizkenar üçgenler gezegeninde sadece iki tür ikizkenar üçgen yaşıyor; tepe açısı  $36^\circ$  olan Dar açılılar ( $D$ ) ve tepe açısı  $108^\circ$  olan Geniş açılılar ( $G$ ). Her yıl bölünme günü tüm üçgenler bölünüyorlar, öyle ki her  $D$  iki küçük  $D$  ve bir küçük  $G$ , her  $G$  ise bir küçük  $D$  ve bir küçük  $G$  oluşturuyor. Küçük üçgenler bir sonraki bölünme gününe kadar yetişkin hale geliyorlar. Efsaneye göre gezegende hayat bir tek  $G$  ile başlamış ve eğer  $D$  'lerin sayısının  $G$  'lerin sayısına oranı  $5/3$  'ten büyük olursa gezegen patlayacaktır.
  - a. Gezegenin patlama tehlikesi var mıdır?
  - b.  $D$  'lerin sayısının  $G$  'lerinkine oranı zaman içinde bir limit değere yaklaşır mı ve yaklaşırsa bu değer nedir?