ANALİZ CEBİR

1. $x^4 + 2x^3 - 23x^2 + px + q$ denkleminin kökleri (a, a, b, b) olacak şekilde

"ikişer kökü aynı ise" ise p ve q kaçtır?

$x^4 + 2x^3 - 23x^2 + px + q = (x - a)^2(x - b)^2 = (x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2bx + b^2)$

$= x^4 - 2(a+b)x^3 + (a^2+4ab+b^2)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2$

$a + b = -1$, $a^2 + 4ab + b^2 = -23$, $-2ab(a + b) = p$, $a^2b^2 = q$ elde edilir.

$-23 = a^2 + 4ab + b^2 = (a + b)^2 + 2ab = (-1)^2 + 2ab$ ise $ab = -12$ olur.

$p = -2ab(a + b) = -2(-12)(-1) = -24$

$q = a^2b^2 = (-12)^2 = 144$

2. $x^3 + px^2 + qx + 72$ polinomu $x^2 + ax + b$ ve $x^2 + bx + a$ ile bölünebiliyor ise $x^3 + px^2 + qx + 72$ polinomunun köklerini bulunuz.

III. dereceden polinomu II.dereceden olan polinomlar böldüğüne göre II.dereceden polinomun kökleri aynı zamanda III. Dereceden polinomun da kökleridir. III. Dereceden bir polinomun en fazla 3 kökü olacağından II.dereceden polinomların en az bir kökü ortak olmak zorundadır($a \neq b$).

x_0 bu ortak kök olsun. $x_0^2 + ax_0 + b = 0 \; ve \; x_0^2 + bx_0 + a = 0$ taraf tarafa çıkartırsak;

$(a - b)x_0 + (b - a) = 0$ $a \neq b$ olduğundan $x_0 = 1$ olur.

$x_0 = 1$ ise $1 + a + b = 0$ elde edilir.

$x^2 + ax + b = x^2 - (1 + b)x + b = (x - 1)(x - b)$

$x^2 + bx + a = x^2 - (1 + a)x + a = (x - 1)(x - a)$ ise

$x^3 + px^2 + qx + 72 = (x - 1)(x - a)(x - b)$ olur ve buradan

$p = 1 + a + b = 0$, $q = ab + a + b$, $72 = -ab$ elde edilir

$q = -72 - 1 = -73$ dolayısıyla $x^3 + px^2 + qx + 72 = x^3 - 73x + 72$ olur.

$x^3 - 73x + 72 = (x - 1)(x - 8)(x + 9)$ ise $x = 1, 8, -9$ olur.

3. a, b tamsayı olmak üzere; $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15$ polinomunun bütün kökleri rasyonel ise;

   a. polinomun köklerini bulunuz

Baş katsayı 1 ve bütün katsayılar tamsayı olduğundan bütün rasyonel kökler tamsayıdır ve 15 in bölenlerinin $\{\pm1, \pm3, \pm5, \pm15\}$ dörtlü bir kombinasyonudur. Dördünün çarpımı ve toplamı -2 olacağından bu kombinasyonu veren dörtlü {-5, -1, 1, 3} olur.

   b. a ve b tamsayılarını bulunuz

$(x + 5)(x + 1)(x - 1)(x - 3) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$ ise $a = -16$, $b = -2$

4. $\frac{1}{k+1} < (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4 < \frac{1}{k}$ şartını sağlayan k pozitif tamsayısı kaçtır?

$$0 < \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$k < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 < k+1$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+2\sqrt{6}, \quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5-2\sqrt{6}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 = 49+20\sqrt{6}, \ (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4 = 49-20\sqrt{6}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4 = 2.49 = 98$$

$$0 < (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4 < 1 \Rightarrow \ 97 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 < 98$$

$$\frac{1}{98} < (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4 < \frac{1}{97}$$

$$k = 97$$

5. $\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)} = ?$

$324 = 18^2 = 4.3^4$

$x^4 + 4y^4 = [(x-y)^2+y^2][(x+y)^2+y^2]$ ise

$n^4 + 324 = [(n-3)^2+9][n+3)^2+9]$

$$\frac{(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9).....(55^2+9)(61^2+9)}{(1^2+9)(7^2+9)(13^2+9)......(49^2+9)(55^2+9)} = \frac{(61^2+9)}{(1^2+9)} = 373$$

6. a, b tamsayı olmak üzere; $x^2 - x - 1$ ifadesi $ax^{17} + bx^{16} + 1$ ifadesinin bir tam böleni ise a kaçtır?

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri p = $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ve q = $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ aynı zamanda $ax^{17} + bx^{16} + 1 = 0$ denkleminin de köküdür. Yani $ap^{17} + bp^{16} = -1$, $aq^{17} + bq^{16} = -1$ olur. pxq = -1 olduğundan birinci denklemi q^{16} ile ve ikinci denklemi p^{16} ile çarparsak $ap + b = -q^{16}$, $aq + b = -p^{16}$ elde edilir.

a = $\frac{p^{16}-q^{16}}{p-q} = (p^8+q^8)(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)$

p + q = 1, $p^2 + q^2 = 3$, $p^4 + q^4 = 7$ ise $p^8 + q^8 = 47$ ise a = 987 elde edilir.

KOMBİNATORİK

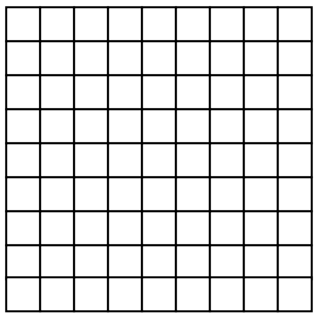
1. 12345678910111213.....99100 sayısı 1 den 100 e kadar olan sayıların yan yana yazılmasıyla elde edilmiştir. Bu sayının basamaklarından herhangi 100 tanesinin silinmesiyle elde edilebilecek sayılardan en büyüğünün en soldaki 7 basamağının oluşturduğu sayı kaç olur?

1 den 9 a kadar 9 tane bir basamaklı sayı var. 10 dan 99 a kadar 90 tane iki basamaklı sayı var dolayısıyla 9 + 2.90 + 3 = 192 basamaklı bir sayı elde edilir. 100 basamağı silindiğinde ise 92 basamaklı bir sayı kalır. 100 basamak silindikten sonra sayımızın en büyük olabilmesi için baş tarafındaki rakamların 9 olması lazım.

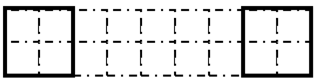
12345678 sayılarını silelim. 8 basamak.
101112......181 sayılarını silelim. 9.2 + 1 = 19 basamak.
202122......282 sayılarını silelim. 9.2 + 1 = 19 basamak.
303132......383 sayılarını silelim. 9.2 + 1 = 19 basamak.
404142......484 sayılarını silelim. 9.2 + 1 = 19 basamak.

Toplam 19.4 + 8 = 84 basamak sildik.
Elde kalan sayı 9999950515253.......99100 16 basamak daha silmemiz lazım. Dolayısıyla 5051525354555657 basamaklarını silmemiz lazım.
9999958859....99100 ancak buradaki 5 ve 8 i silip onun yerine en başta sildiğimiz 7 ve 8 i yazarsak 9999978596061.......99100 sayısı elde edilir. 9999978 bulunur.

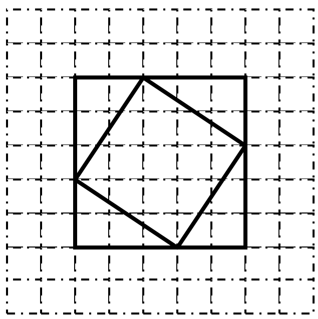
2. Köşeleri şekildeki 9x9 boyutundaki tahtayı oluşturan doğruların kesişim noktaları üzerinde olan kaç tane kare çizilebilir?

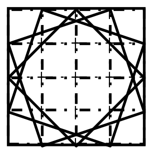


1x1 lik 9^2 = 81 tane
2x2 lik kare sayısı



Şekildeki gibi 3x9 boyutundaki kısımdan 8 tane 2x2 lik kare elde edilir. Bu şekilde toplam 8 tane 3x9 boyutunda tahtalar elde edilebileceğinden 2x2 lik toplam 8^2 = 64 tane kare elde edilir. Aynı şekilde incelediğimizde 3x3 lük kare sayısının 7^2 = 49 ve $1 \le k \le 9$ için $(10 - k)^2$ tane kxk lık kare elde edilir.
Fakat problemin zor kısmı bazı kareler vardır ki bunlar daha önce elde ettiğimiz karelerden farklı kenarlara sahiptir.(şekildeki gibi) Şekiller düzgün çizildiğinde k birim uzunluğunda kenara sahip bir karenin içine en dıştaki kare dahil olmak üzere k tane kare elde edilebilir. k = 4 için 4 kare gibi. Bizim karelerimizin uzunlukları 1 den 9 a kadar olduğuna göre $\sum_{k=1}^{9}(10-k)^2 k$ =825 tane kare elde edilir.



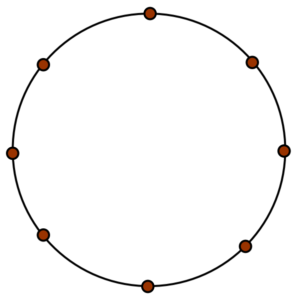


3. Bir çember üzerinde eşit aralıklar ile işaretlenmiş 8 nokta vardır;

a. Köşeleri bu noktalar üzerinde olan kaç üçgen çizilebilir?

$$\binom{8}{3} = \frac{8x7x6}{3x2x1} = 56$$

b. Köşeleri bu noktalar üzerinde olan kaç tane dik üçgen çizilebilir?



Karşılıklı olarak noktaları eşleştirdiğimizde toplam 4 tane çap elde edebiliriz. Dolayısıyla iki noktayı çap elde etmek için kullanırız. Geriye kalan 6 noktadan biri ile istenilen dik üçgenler elde edilir.

4 x 6 = 24

4. 1000 ile 9999 arasındaki sayılardan kaç tanesinin ilk basamağındaki rakam ile son basamağındaki rakamın farkının mutlak değeri 2 dir?

A) 672 B) 784 C) 840 D) 896 E) 1008

5. 13 satır ve 17 kolondan oluşan bir tablodaki her bir kareye üst soldan başlayarak ilk satıra 1, 2, 3, ..., 17 sayıları ikinci satıra 18, 19, 20, ... ,34 sayıları ve bu şekilde bütün satırlara 1 den 221 e kadar olan sayılar yazılıyor. Daha sonradan aynı tablo üst soldan başlanarak bu sefer yukarıdan aşağıya doğru ilk kolona 1, 2, 3, ..., 17 sayıları ikinci kolona 18, 19, 20, ... ,34 ve bu şekilde bütün kolonlara 1 den 221 e kadar olan sayılar yazılıyor. Her iki numaralandırma işleminde de aynı karelere yazılan sayıların toplamı kaçtır?

A) 222 B) 333 C) 444 D) 555 E) 666

6. {1}, {2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10}, ………….. şeklinde ardışık sayılardan oluşan kümelerden her biri bir önceki kümeden 1 fazla elemana sahiptir. n'inci kümenin elemanlarının toplamı S_n ise S_{21} kaçtır?

A) 1113 B) 4641 C) 5082 D) 53361 E) hiçbiri

SAYILAR TEORİSİ

1. $m^3 + 6m^2 + 5m = 27n^3 + 9n^2 + 9n + 1$ eşitliğini sağlayan kaç tane (m , n) tamsayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 9 E) sonsuz

2. Son üç basamağı 888 olan en küçük pozitif tamsayı kaçtır?

Bir sayının küpü 8 ile bitiyorsa o sayının birler basamağındaki rakam 2 olmak zorundadır. Dolayısıyla bu şartı sağlayan sayılar 10k + 2 şeklindedir.

$n^3 = (10k + 2)^2 = 1000k^3 + 600k^2 + 120k + 8$

bizden istenen şartı bulmamız için 120k sayısını inceleyelim. Birler basamağı 8 olacağından sadece 12k ya bakalım. Onlar basamağının 8 olması için k = 4 yada k = 9 olmalıdır. Dolayısıyla k = 5m + 4 şeklindedir.

$n^3 = (10(5m + 4) + 2)^3$

$= 125000m^3 + 315000m^2 + 264600m + 740888$

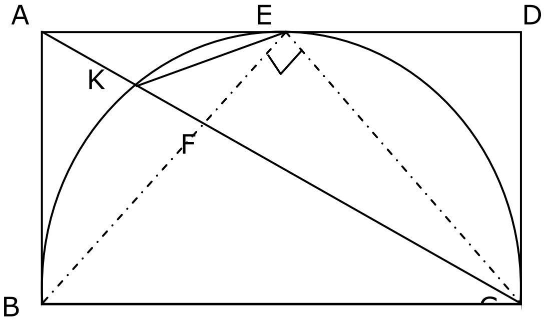
bu durumda bu sayının son üç basamağı 088 ile biter. Dolayısıyla 264600m sayısı da 8 ile bitmelidir. Bu şartı sağlayan en küçük m sayısı 3 tür.

m = 3 ise k = 5x3 + 4 = 19, n = 10x19 + 2 = 192 olur. $192^3 = 7077888$

GEOMETRİ

1. ABCD dörtgeninde köşegenlerin kesişim noktası O dur. |BO|= 4, |OD|= 6, |AO|= 8, |OC|= 3 ve |AB|= 6 ise |AD| kaçtır.

2. ABCD dikdörtgeninin içinde |BC| çaplı yarım daire dikdörtgene |AD| kenarı üzerinde E noktasında teğettir.|AC| köşegeni yarım daireyi K noktasında kesmektedir. |EK| = 2 ise yarım dairenin yarı çapı kaç olur?



Şekle göre EBC açısı ile EKC açısı aynı yayı gördüğünden eşit olur. BEC açısı çapı gördüğünden dik olur.

Buradan |BE| = |EC|= $\frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$

AKE üçgeninde

$$\frac{2}{SinA} = \frac{r}{Sin(AKE)} = \frac{r}{Sin(EKC)} = \frac{r}{Sin(EBC)}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow r = \sqrt{10}$$